RÉFLEXIONS

SUR UN PROBLÈME DE GEOMÉTRIE

TRAITÉ PAR QUELQUES GEOMÉTRES, ET QUI EST NÉANMOINS IMPOSSIBLE.

PAR M. EULER.

Il y a des perſonnes qui prétendent, que la Geométrie & l'Analyſe ne demandent pas beaucoup de raiſonnemens; ils s'imaginent que les régles, que ces Sciences nous preſcrivent, renferment déjà les raiſonnemens néceſſaires pour parvenir à la ſolution, & qu'on n'a qu'à executer les opérations conformément à ces régles, ſans ſe mettre en peine des raiſonnemens, ſur lesquels ces régles ſont fondées. Cette opinion, ſi elle étoit fondée, ſeroit bien contraire au ſentiment presque général, où l'on regarde la Geométrie & l'Analyſe comme les moyens les plus propres à cultiver l'eſprit, & à mettre en exercice la faculté de raiſonner. Quoique ces gens ayent une teinture des Mathématiques, il faut pourtant qu'ils ſe ſoient peu appliqués à la reſolution des problèmes un peu difficiles: car ils ſe ſeroient bientôt apperçus, que la ſeule application des régles preſcrites eſt d'un fort foible ſecours pour réſoudre ces ſortes de problèmes, & qu'il faut auparavant examiner bien ſoigneuſement toutes les circonſtances du problème, & faire là deſſus quantité de raiſonnemens, avant qu'on puiſſe employer ces régles, qui renferment le reſte des raiſonnemens, dont nous ne nous appercevons presque point, en pourſuivant le calcul. C'eſt cette préparation néceſſaire avant que de recourir au calcul, qui exige très ſouvent une plus longue ſuite de raiſonnemens, que peut-

être aucune autre Science n'exige jamais ; & où l'on a ce grand avantage, qu'on peut s'assurer de leur justesse, pendant que dans les autres Sciences on est souvent obligé de s'arrêter à des raisonnemens peu convaincans. Mais aussi le calcul même, quoique l'Analyse en prescrive les régles, doit partout être soutenu par un raisonnement solide, au défaut duquel on risque de se tromper à tout moment. Le Geométre trouve donc par tout occasion d'exercer son esprit par des raisonnemens, qui le doivent conduire dans la solution de tous les problèmes difficiles, qu'il entreprend ; & à moins qu'il ne soit bien sur ses gardes, il est à craindre, qu'il ne tombe sur des solutions fausses. Un problème de Geométrie, qu'on trouve amplement traité dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, & dans les Actes de Leipzig, peut servir d'une preuve bien remarquable de ce que je viens d'avancer ; ce problème étoit conçu dans ces termes :

Fig. 1. *Trouver une ligne courbe* MAN *autour d'un point fixe* C, *telle, que si l'on tire par ce point* C *une ligne droite quelconque* MCN, *qui coupe la courbe en deux points* M & N, *les tangentes* MT & NT *menées à ces points fassent entr'elles en* T *un angle donné.*

Quoiqu'on trouve de ce problème diverses solutions, je soutiens qu'il est toujours impossible, à moins que l'angle T ne soit, ou droit, ou nul ; à l'exception de ces deux cas, les solutions prétenduës péchent contre le principe de continuité, qu'on ne doit jamais perdre de vuë dans ces sortes de problèmes, où il s'agit de deux points, qui doivent appartenir à la même ligne courbe. C'est ce grand principe de continuité qu'il faut étudier à fond, avant qu'on puisse se promettre un bon succès dans ces recherches ; &, c'est de là, qu'on doit puiser non seulement les fondemens de la solution, mais aussi le jugement, si le problème est possible ou non ? Pour développer solidement tout ce qui regarde le problème en question, je m'en vais faire là dessus les réflexions suivantes.

1. Ré-

1. Réflexion.

Pour repréſenter une telle courbe, en cas qu'elle ſoit poſſible, je conçois une ligne fixe CA tirée du point C, autour duquel on faſſe tourner une ligne CM, dans le ſens AM, de ſorte que l'angle ACM, s'ouvre de plus en plus, jusqu'à ce que la ligne CM, après avoir achevé un tour entier, revienne dans la ſituation CA. Et d'abord je remarque qu'à chaque angle ACM doit répondre à une ſeule valeur de la ligne CM, puisqu'elle ne doit couper la courbe que dans un ſeul point M; car ſi elle la coupoit en pluſieurs, cela ſeroit contraire à la nature de la queſtion, qui ſuppoſe que chaque ligne MCN prolongée de part & d'autre du point C ne rencontre la courbe qu'en deux points M & N. Or je diſtingue ici les deux parties CM & CN de cette ligne droite, entant que la partie CM répond à l'angle ACM, & l'autre CN à l'angle pointu, qui ſurpaſſe celui-là de deux droits.

2. Réflexion.

Poſant donc l'angle ACM $=\phi$, & la droite CM $= z$, la nature de la courbe déterminera z par une certaine fonction de l'angle ϕ, ou des quantités qui en dépendent. Telles quantités ſont le ſinus & coſinus de l'angle ACM, qui ſont d'autant plus propres à former la détermination de la ligne CM $= z$, puisqu'elles reprennent toutes les fois les mêmes valeurs, que la ligne mobile CM revient après un ou pluſieurs tours dans la même ſituation CM; au lieu que ſi l'angle lui-même ACM $=\phi$ entroit dans cette détermination, il en réſulteroit après chaque tour une nouvelle valeur de la ligne CM. Il ne faut pas non plus, que les ſinus ou coſinus de la moitié, ou du tiers, ou quart &c. de l'angle ACM entrent dans la détermination de la ligne CM $= z$, puisque ces quantités donneroient à la fois deux ou pluſieurs valeurs pour la ligne CM. Pour éviter donc ces cas contraires à la nature du problème, il faut que la ligne CM $= z$ ſoit exprimée par une fonction uniforme de ſin ϕ & coſ ϕ.

3. Ré-

3. Réflexion.

Concevons donc que la ligne $CM = z$ ſoit égale à une fonction uniforme de ſin ϕ & cof ϕ ; & en vertu du principe de continuité, ſi l'on met pour ϕ un autre angle quelconque $ACμ = \psi$, & partant ſin ψ & cof ψ pour ſin ϕ & cof ϕ, ladite fonction donnera la valeur de la ligne $Cμ$, qui répond à l'angle $ACμ = \psi$. Donc, pour arriver à la droite CN, qui eſt en oppoſition avec la première CM, il faut augmenter l'angle ϕ de deux angles droits ; ou bien ladite fonction donnera la quantité de la ligne CN, lorsqu'on met au lieu de l'angle ϕ l'angle $180° + \phi$. Or puisque ſin $(180° + \phi) = -$ ſin ϕ, & cof $(180° + \phi) = -$ cof ϕ, ſi dans la fonction de ſin ϕ & cof ϕ, qui exprime la quantité de la ligne $CM = z$, on met pour ſin ϕ & cof ϕ leurs négatifs $-$ ſin ϕ & $-$ cof ϕ, la fonction exprimera la quantité de la ligne droite CN. Et partant ſi nous nommons cette ligne $CN = z'$, la fonction z ſe changera en z', lorsqu'on mettra $-$ ſin ϕ & $-$ cof ϕ au lieu de ſin ϕ & cof ϕ.

4. Réflexion.

Mais, pour nous approcher davantage de la queſtion propoſée, qui demande que l'angle T ſoit conſtant, il ſera bon d'introduire dans le calcul l'angle CMT, que fait la droite CM, avec la tangente de la courbe MT. La ſuite de nos recherches nous fera voir, qu'il eſt le plus à propos d'introduire la tangente de cet angle CMT, qui ſoit $= t$. Or il eſt aiſé de voir qu'il y aura $t = \frac{z d\phi}{dz}$: au lieu que le ſinus & coſinus de cet angle CMT auroient été exprimés par des formules irrationnelles $\frac{z\,d\phi}{\sqrt{(dz^2 + zz\,d\phi^2)}}$, & $\frac{dz}{\sqrt{(dz^2 + zz\,d\phi^2)}}$, qui à cauſe de l'ambiguité du ſigne radical introduiroient une ambiguité dans le calcul, que nous devons éviter : ce qui eſt la raiſon, qu'il convient de ſe ſervir plutôt de la tangente de l'angle CMT.

5. Ré-

5. RÉFLEXION.

Ayant donc posé la tangente de l'angle CMT $= t$, puisque $t = \frac{z d\Phi}{dz}$, si z est une fonction de sin Φ & cos Φ, comme nous supposons, il est évident que t sera aussi exprimé par une fonction de sin Φ & cos Φ. Nous pourrons nous donc passer d'abord dans le calcul de la longueur de la ligne CM $= z$, & considérer immédiatement la quantité t comme une fonction de sin Φ & cos Φ: & ce que nous avons remarqué sur l'uniformité de la fonction z, aura aussi lieu à l'égard de la fonction t, qui doit être telle, qu'à chaque angle ACM $= \Phi$, il ne réponde qu'une valeur pour t, ou pour la tangente CMT. Donc, si nous mettons pour Φ un autre angle quelconque AC$\mu = \psi$, la même fonction donnera alors la tangente de l'angle CμM, que la droite Cμ fait en μ avec la courbe.

6. RÉFLEXION.

Mais, puisque chaque ligne CM fait avec la courbe deux angles, l'un CMT en avant, & l'autre CMμ en suite du mouvement, il faut bien fixer d'abord, lequel de ces deux est introduit dans le calcul. Cela dépend bien de notre volonté, mais il faut bien prendre garde, qu'après avoir choisi l'un ou l'autre pour une situation de la droite CM, on suive pour toutes les autres situations le même choix. Ayant donc pris $t = \frac{z d\Phi}{dz}$ pour marquer la tangente de l'angle, que fait la droite CM avec la courbe en avant par rapport au mouvement de gyration, que nous supposons à la ligne mobile CM, nous devons suivre dans toute autre situation la même régle. Ainsi mettant ψ pour Φ, la valeur de t donnera la tangente de l'angle CμM; & lorsqu'on tourne la ligne CM jusqu'à parvenir à CN, alors l'expression de t donnera la tangente de l'angle CNν, & non pas celle de l'angle CNT.

7. RÉFLEXION.

Soit donc t' la tangente de l'angle CNv, que fait la ligne CN avec la courbe en avant ; & de quelque maniere que t, ou la tangente de l'angle CMT ſoit exprimée par ſin ϕ & coſ ϕ, cette même expreſſion fournira en vertu du principe de continuité la valeur de t', ſi l'on met au lieu de l'angle ϕ, l'angle $180° + \phi$, ou bien ſi l'on met $-$ ſin ϕ & $-$ coſ ϕ au lieu de ſin ϕ & coſ ϕ. Donc ſi nous ſuppoſons que t eſt égal à une certaine fonction de ſin ϕ & coſ ϕ, alors t' ſera égal à une ſemblable fonction de $-$ ſin ϕ & $-$ coſ ϕ ; ou la fonction t' reſultera de la fonction t, ſi l'on prend dans celle-cy tant ſin ϕ que coſ ϕ négatifs. D'où l'on comprend réciproquement, que la fonction t' fournira la fonction t, ſi l'on y prend auſſi négativement le ſin ϕ & coſ ϕ : & partant t & t' ſont deux fonctions de ſin ϕ & coſ ϕ tellement rapportées entr'elles que l'une nait de l'autre, en poſant $-$ ſin ϕ & $-$ coſ ϕ au lieu de ſin ϕ & coſ ϕ.

8. RÉFLEXION.

On trouve donc de la tangente t de l'angle CMT, celle de l'angle CNv, ou t', en prenant les ſin ϕ & coſ ϕ négativement : & puiſque t' marque la tangente de l'angle CNv, la tangente de l'angle CNT ſera $= -t'$. Or le problème exige, que la ſomme des angles $CMT + CNT$ ſoit conſtante, ou ſi nous poſons l'angle $MTN = \alpha$, il faut qu'il ſoit

$$\alpha = CNv - CMT.$$

Donc, puiſque tang $CNv = t'$ & tang $CMT = t$, nous aurons:

$$\text{tang } \alpha = \frac{t' - t}{1 + tt'}.$$

Et partant pour réſoudre le problème, il faut chercher une telle fonction de ſin ϕ & coſ ϕ, que poſant $-$ ſin ϕ & $-$ coſ ϕ pour $+$ ſin ϕ & $+$ coſ ϕ, il en réſulte t' en ſorte qu'il devienne

$$\frac{t' - t}{1 + tt'} = \text{tang } \alpha, \text{ ou } t' - t = \text{tang } \alpha - tt' \text{ tang } \alpha.$$

9. RÉ-

9. Réflexion.

Ayant établi un tel rapport entre les deux fonctions t & t', que l'une nait de l'autre en prenant négativement les élémens $\sin\phi$ & $\cos\phi$, dont elles sont fonctions : il s'agit de déterminer la nature de ces fonctions, afin qu'il soit

$t' - t = \text{tang}\,\alpha + t t' \,\text{tang}\,\alpha$, ou $t' - t - t t' \,\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\alpha$.

Pour tirer commodément de cette équation l'une & l'autre quantité t & t', je la multiplie par tang α, & j'ajoute de part & d'autre l'unité, d'où j'obtiens

$1 + t' \,\text{tang}\,\alpha - t \,\text{tang}\,\alpha - t t' \,\text{tang}\,\alpha^2 = 1 + \text{tang}\,\alpha^2 = \text{sec.}\,\alpha^2$.

Je fais ces opérations, pour rendre le premier membre réſoluble en deux facteurs, où les deux quantités t & t' ſoient ſéparées, car on aura : $(1 - \text{tang}\,\alpha)(1 + t' \,\text{tang}\,\alpha) = \text{sec.}\,\alpha^2$,

& voyons, comment on doit ſatisfaire à cette équation.

10. Réflexion.

Donc, ſi nous poſons $1 - t \,\text{tang}\,\alpha = \text{M sec.}\,\alpha$, il faut de néceſſité que l'autre ſoit $1 + t' \,\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\text{M}} \,\text{sec.}\,\alpha$: & partant nous aurons : $t \,\text{tang}\,\alpha = 1 - \text{M sec.}\,\alpha$, & $t' \,\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\text{M}} \,\text{sec.}\,\alpha - 1$.

Suppoſons maintenant que M change en M′, ſi l'on prend négativement les ſinus & coſinus de ϕ ; & puiſqu'alors t change en t', & t' en t, nous aurons encore ces équations :

$t' \,\text{tang}\,\alpha = 1 - \text{M}' \,\text{sec.}\,\alpha$, & $t \,\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\text{M}'} \,\text{sec.}\,\alpha - 1$.

Celles-cy étant combinées avec celles-là donnent

$2 = \text{M sec}\,\alpha + \frac{1}{\text{M}'} \,\text{sec.}\,\alpha$, & $2 = \text{M}' \,\text{sec.}\,\alpha + \frac{1}{\text{M}} \,\text{sec.}\,\alpha$,

d'où l'on tire $\text{M}' = \text{M}$, & de plus $2\text{M} = (\text{MM} + 1) \,\text{sec.}\,\alpha$,

ce qui fournit une valeur déterminée pour $M = \frac{1 \pm V(1 - \text{sec. } \alpha^2)}{\text{sec. } \alpha}$, laquelle étant imaginaire montre ſuffiſamment, qu'il eſt impoſſible de réſoudre le problème en général. Car à cauſe de $V(1 - \text{sec. } \alpha^2) = V - 1 . \text{tang } \alpha$, il en ſuivroit $t = \pm V - 1$, ou bien la courbe AM ſeroit imaginaire.

II. Réflexion.

C'eſt donc en vertu du principe de continuité, qu'on doit prononcer, que le problème conçû généralement n'admet aucune ſolution; & partant les ſolutions prétendues, que quelques uns en ont données, ſont en contradiction avec ce principe, & ne donnent pas de courbes continues, qui ſatisfaſſent à la queſtion; ce qu'il ſera aiſé de faire voir, en comparant ces ſolutions avec les maximes que je viens de déduire du principe de continuité. Auſſi ne trouve-t-on aucune de ces ſolutions appliquée à une courbe déterminée, pour qu'on en puiſſe voir, de quelle maniere les conditions du problème ſeroient remplies, ſi ce n'eſt pour le cas, où l'angle T formé par les tangentes eſt droit. Mais dans ce cas les raiſons, d'où je viens de conclure l'impoſſibilité du problème, ceſſent, & font voir évidemment, que le problème devient poſſible dans ce cas, & qu'il admet même une infinité de ſolutions, parmi leſquelles il s'en trouve de fort remarquables. Cette impoſſibilité ſe perd auſſi dans le cas, où l'angle T évanouit, ce qu'il ſera important de développer plus ſoigneuſement.

12. Réflexion.

Je dis donc que les raiſons, qui viennent de nous convaincre de l'impoſſibilité du problème en général, perdent toute leur force dans le cas, où l'angle $T = \alpha$ eſt ſuppoſé droit. Car, puiſqu'alors la ſecante de l'angle α devient infinie, nos deux équations pour M & M′ ſe réduiſent à celles-cy :

$$o = M + \frac{I}{M'}, \quad \& \quad o = M' + \frac{I}{M},$$

aux-

auxquelles ſatisfait la même condition $MM' + 1 = 0$. Donc pour le cas, où l'angle α eſt droit, on n'a qu'à chercher une telle fonction de ſin Φ & cof Φ pour M, qui en prenant ſin Φ & cof Φ négativement devienne M', enſorte qu'il ſoit $MM' + 1 = 0$, & une telle fonction trouvée pour M fournit d'abord à cauſe de $\text{sec.}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha = s$, pour une courbe ſatisfaiſante cette équation $t = -M$, & partant

$$\frac{z d\Phi}{dz} = -M, \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{z} = -\frac{d\Phi}{M}.$$

13. Réflexion.

Pour le cas où l'angle α eſt $= 0$, je lui ai donné l'excluſion par les opérations faites dans la 5me Réflexion, y ayant multiplié notre équation par tang α, qui évanouït dans ce cas. Il faut donc traiter ce cas ſéparément, & commencer par la première équation, qui poſant $\alpha = 0$ donne d'abord $t' - t = 0$, ou $t' = t$: d'où à cauſe de $t = \frac{z d\Phi}{dz}$, & $t' = \frac{z' d\Phi}{dz'}$, l'on tire:

$$\frac{z d\Phi}{dz} = \frac{z' d\Phi}{dz'}, \text{ ou } \frac{dz}{z} = \frac{dz'}{z'}, \text{ & partant } z' = z.$$

Il faut donc que chaque droite M'C N ſoit partagée également en C; ou que le point C ſoit le centre de la courbe: de ſorte que toute courbe douée d'un centre fourniſſe une ſolution de ce cas. Ce cas admet donc une infinité de ſolutions, & même par des courbes algébriques, qu'il eſt fort facile de trouver, & par cette raiſon je ne m'y arrêterai pas plus long tems.

14. Réflexion.

A moins donc que l'angle T formé par les deux tangentes MT & NT ne ſoit, ou droit, ou nul, le problème eſt toujours impoſſible, de quelque maniere qu'on le regarde; & on ne ſauroit jamais trouver une courbe continue, qui donneroit cet angle T conſtant & oblique. Il eſt donc d'autant plus remarquable, que ce même problè-

me devient poſſible dans le cas, où l'angle T eſt droit; & il mérite d'autant plus, que j'en dévelope la ſolution fournie par les réflexions précedentes, que les ſolutions, que d'autres en ont données, ſont envelopées dans les ſolutions prétenduës générales, de ſorte que ce n'eſt que par hazard, qu'elles deviennent juſtes dans ce cas. Il eſt auſſi à remarquer, que dans ce cas il y a même une infinité de courbes algébriques, qui ſatisfaſſent, parmi leſquelles ſe trouve la parabole, dont le foyer répond au point C. Or la méthode de trouver ces courbes algébriques demande une adreſſe particuliere, que je m'en vais expliquer.

PROBLÈME.

Autour du point C *décrire la courbe* MAN, *que tirant par* C *des droites quelconques* MCN, *qui coupent la courbe en deux points* M & N, *les tangentes* MT & NT *menées à ces deux points ſoient entr'elles perpendiculaires, ou l'angle* MTN *droit.*

SOLUTION.

Ayant tiré par C une ligne fixe CA, poſons l'angle ACM $=\Phi$, la droite CM $= z$, & la tangente de l'angle CMT $= t$, de ſorte que $t = \frac{z d\Phi}{dz}$. Alors tout revient à trouver de telles fonctions M de ſin Φ & coſ Φ, qui ſi l'on prend négativement tant ſin Φ que coſ Φ, elles changent en M' en ſorte qu'il ſoit $MM' + 1 = 0$; ou puiſque $t = -M$ & $t' = -M'$ & partant $tt' + 1 = 0$, la quantité t doit auſſi être une telle fonction de ſin Φ & coſ Φ, qu'en écrivant $-$ ſin Φ & $-$ coſ Φ, au lieu de $+$ ſin Φ & $+$ coſ Φ, elle change en ſorte en t', qu'il ſoit $tt' + 1 = 0$. Voyons donc quelles fonctions de ſin Φ & coſ Φ ont cette propriété, & d'abord ſe préſentent celles-cy :

$t =$

$$t = \pm \frac{\sin\Phi}{1-\cos\Phi} \quad \& \quad t = \pm \frac{\sin\Phi}{1+\cos\Phi}, \text{ car :}$$

$$t' = \mp \frac{\sin\Phi}{1+\cos\Phi} \quad \& \quad t' = \mp \frac{\sin\Phi}{1-\cos\Phi}, \text{ donc}$$

$$tt' = -\frac{\sin\Phi^2}{1-\cos\Phi^2} = -1 \quad \& \quad tt' = -\frac{\sin\Phi^2}{1-\cos\Phi^2} = -1.$$

Voilà donc la première fonction convenable pour exprimer la valeur de t :

I. Formule $\quad t = \pm \frac{\sin\Phi}{1 \mp \cos\Phi}.$

On voit auſſi que des puiſſances quelconques de cette formule, dont les expoſans ſont des nombres impairs, ou même des fractions, dont le numerateur & dénominateur ſont impairs, ſatisfont également. Donc, ſi m & n marquent des nombres impairs quelconques, nous aurons :

II. Formule $\quad t = \pm \left(\frac{\sin\Phi}{1 \mp \cos\Phi}\right)^{\frac{m}{n}}.$

Enſuite, par la compoſition des ſinus & coſinus des angles multiples, on ſait que, lorsque l'expoſant de la multiplication eſt un nombre impair λ, tant $\sin\lambda\Phi$ & $\cos\lambda\Phi$ changent de ſignes, lorsqu'on prend les $\sin\Phi$ & $\cos\Phi$ négativement. Donc, prenant pour λ un nombre impair quelconque, nous aurons :

III. Formule $\quad t = \pm \frac{\sin\lambda\Phi}{1 \mp \cos\lambda\Phi}.$

Comme cette formule réſulte de la première en poſant l'angle $\lambda\Phi$ pour Φ, de même on tirera de la ſeconde formule, en marquant par m & n des nombres impairs quelconques,

IV. Formule $\quad t = \pm \left(\frac{\sin\lambda\Phi}{1 \mp \cos\lambda\Phi}\right)^{\frac{m}{n}}.$

Cette formule renfermant toutes les précedentes, il eſt bon de faire voir

voir, comme elle ſatisfait. Qu'on prenne négativement le ſin ϕ & cof ϕ, & on aura $t' = \pm\left(\frac{-\text{ſin}\,\lambda\phi}{1 \pm \text{cof}\,\lambda\phi}\right)^{\frac{m}{n}}$, & partant

$$t\,t' = +\left(\frac{-\text{ſin}\,\lambda\phi^2}{1-\text{cof}\,\lambda\phi^2}\right)^{\frac{m}{n}} = +(-1)^{\frac{m}{n}} = -1.$$

Or outre ces formules on peut en donner une infinité d'autres, qui ont la même propriété. Que P ſignifie une fonction quelconque paire de ſin ϕ & cof ϕ, ou telle qui demeure la même, quoiqu'on prenne ſin ϕ & cof ϕ négativement : or que Q ſoit une fonction impaire de ſin ϕ & cof ϕ, qui devienne $-Q$ en prenant ſin ϕ & cof ϕ négativement; & il eſt clair que cette expreſſion $\frac{P+Q}{P-Q}$, devient par ce changement $= \frac{P-Q}{P+Q}$, de ſorte que le produit de ces deux valeurs ſoit $= 1$. Une telle expreſſion ne ſeroit donc pas propre pour t, mais il eſt évident, qu'on en peut multiplier les formules données, ſans qu'elles perdent leur propriété. D'où ſi P marque une fonction paire & Q une fonction impaire de ſin ϕ & cof ϕ, nous aurons les formules ſuivantes beaucoup plus générales :

V. Formule $t = \pm \frac{\text{ſin}\,\phi}{1 \pm \text{cof}\,\phi} \cdot \frac{P+Q}{P-Q}$

VI. Formule $t = \pm\left(\frac{\text{ſin}\,\phi}{1 \pm \text{cof}\,\phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{P+Q}{P-Q}$

VII. Formule $t = \pm \frac{\text{ſin}\,\lambda\phi}{1 \pm \text{cof}\,\lambda\phi} \cdot \frac{P+Q}{P-Q}$

VIII. Formule $t = \pm\left(\frac{\text{ſin}\,\lambda\phi}{1 \pm \text{cof}\,\lambda\phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{P+Q}{P-Q}$

Il eſt auſſi clair qu'une puiſſance quelconque de $\frac{P+Q}{P-Q}$, peut être employée avec le même ſuccès : donc prenant pour μ & ν des nombres quelconques tant pairs qu'impairs, pendant que m & n & λ ne marquent que des nombres impairs ; d'où nous obtiendrons encore les quatre formules ſuivantes :

IX. Formule $$t = \pm \frac{\sin \Phi}{1 \pm \cos \Phi} \cdot \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

X. Formule $$t = \pm \left(\frac{\sin \Phi}{1 \pm \cos \Phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

XI. Formule $$t = \pm \frac{\sin \lambda \Phi}{1 \pm \cos \lambda \Phi} \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

XII. Formule $$t = \pm \left(\frac{\sin \lambda \Phi}{1 \pm \cos \lambda \Phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

Donc, chacune de ces formules étant égalée à $\frac{z d\Phi}{dz}$ fournira une ſolution du problème ; & puiſque la derniere contient toutes les autres, elle nous fournit la ſolution générale ſuivante :

$$\frac{dz}{z} = \pm d\Phi \left(\frac{1 \pm \cos \lambda \Phi}{\sin \lambda \Phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

ou puiſque $\frac{1 \pm \cos \lambda \Phi}{\sin \lambda \Phi} = \frac{\sin \lambda \Phi}{1 \mp \cos \lambda \Phi}$ celle-ci,

$$\frac{dz}{z} = \pm d\Phi \left(\frac{\sin \lambda \Phi}{1 \pm \cos \lambda \Phi}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

laquelle, puisque les deux variables z & ϕ ſont ſéparées, ſuffit pour conſtruire toutes ces courbes, qui réſolvent le problème.

COROLL. 1.

Dans ces équations on peut auſſi l'angle PCM prendre pour ϕ : car, outre qu'il eſt indifférent de prendre la droite CA de l'autre côté, l'ambiguité du ſigne $\pm$ dont le différentiel $d\phi$ eſt affecté, ne change rien dans notre équation générale, quoiqu'elle produiſe toujours deux courbes differentes.

COROLL. 2.

Mais l'ambiguité du ſigne $\pm$ qui affecte $\text{cof}\,\phi$, ne produit pas deux courbes differentes ; car, ſi un ſigne regarde l'angle $ACM = \phi$, l'autre donnera la même courbe pour l'angle $PCM = \phi$, puisque ſi le coſinus de l'un eſt poſitif, celui de l'autre devient négatif, le ſinus demeurant le même.

COROLL. 3.

Ayant trouvé une équation entre la droite $CM = z$, & l'angle ACM ou $PCM = \phi$, il eſt aiſé d'en tirer une équation entre les coordonnées ordinaires $CP = x$ & $PM = y$. Car d'abord on aura $z = \sqrt{(xx+yy)}$, & $\text{ſin}\,\phi = \frac{y}{z}$, & $\text{cof}\,\phi = \frac{x}{z}$.

COROLL. 4.

De là il eſt clair, que ſi l'on trouve une équation algébrique entre z & le ſinus & coſinus de l'angle ϕ, ſans que l'angle ϕ même y entre par l'intégration; on parviendra auſſi à une équation algébrique entre les coordonnées x & y ; ou bien la courbe ſera algébrique.

COROLL. 5.

Donc, pour trouver des courbes algébriques, il faut déterminer notre équation générale $\frac{dz}{z} = \pm d\phi \left(\frac{\text{ſin}\,\lambda\phi}{1 \pm \text{cof}\,\lambda\phi}\right)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$

en

en ſorte, que l'intégrale du dernier membre devienne un logarithme d'une fonction de ſin ϕ & cof ϕ. Car, toutes les fois que cette intégrale n'eſt pas réductible à un tel logarithme, la courbe ne ſauroit être algébrique.

REMARQUE.

A l'égard des courbes algébriques, ce problème eſt très remarquable: car au lieu que dans les autres problèmes de cette eſpece, où il s'agit des courbes algébriques qui leur ſatisfont, il faut rendre abſolument intégrables quelques formules différentielles; ce problème exige, qu'une formule différentielle devienne intégrale par les logarithmes, & cette circonſtance demande une adreſſe tout particuliere dans le calcul. J'ai bien donné autrefois des régles, par le moyen desquelles on peut rendre intégrables des formules différentielles indéterminées; mais ces régles ne nous prêtent aucun ſecours dans la recherche des courbes algébriques, qui ſatisfont à ce problème. Il faut auſſi remarquer, que lorsqu'il entre dans l'intégrale l'angle ϕ même, non ſeulement la courbe ne devient pas algébrique, mais elle ne remplira pas duëment les conditions du problème; parce qu'à chaque angle $ACM = \phi$, la droite $CM = z$ obtiendra une infinité de valeurs différentes, ou bien chaque droite menée par le point C coupera la courbe dans une infinité de points, ce qui eſt contraire à l'enoncé du problème. De là il faut conclure, que les courbes algébriques ſont proprement celles, qui ſatisfont au problème: & partant ſa ſolution demande principalement des courbes algébriques, dont la recherche eſt par conſéquent très eſſentielle à la ſolution de ce problème. Or, puisqu'il eſt impoſſible de donner une ſolution générale, qui renferme toutes les courbes algébriques; il faut ſe contenter des ſolutions particulieres, dont je m'en vais développer les principales.

PROBLÈME PARTICULIER.

Trouver des courbes algébriques, qui ſatisfaſſent au problème précedent, ou telles, qu'ayant mené par le point fixe C, *des droi-*

tes quelconques M C N, *elles coupent la courbe en ſorte en deux points* M & N, *que les tangentes* M T & N T *tirées à ces points, faſſent entr'elles en* T *un angle droit.*

I. Solution.

Soit dans la ſolution générale $\frac{\mu}{\nu} = 0$, $\lambda = 1$, & $\frac{m}{n} = 1$, pour avoir cette équation

$$\frac{d z}{z} = \pm \frac{d \Phi \sin \Phi}{1 \pm \cos \Phi}$$

dont l'intégrale priſe par les logarithmes, ſera

$$l z = l a \pm l(1 \pm \cos \Phi).$$

De là on tirera deux courbes, ſelon que $l(1 \pm \cos \Phi)$ eſt affecté, ou par le ſigne $+$, ou par $-$: mais l'ambiguité $\pm \cos \Phi$ ne donne pas des courbes différentes, d'où il ſuffit de prendre $+ \cos \Phi$.

Examinons ſéparément ces deux courbes.

1. *Courbe.* Que $l(1 + \cos \Phi)$ ait le ſigne $-$, & en montant des logarithmes aux nombres, on aura :

$$z = \frac{a}{1 + \cos \Phi}, \quad \text{ou} \quad z + x = a$$

à cauſe de $z \cos \Phi = x$. Ayant donc $z = a - x$, en prenant les quarrés, à cauſe de $zz = xx + yy$, on trouvera :

$$yy = aa - 2ax, \quad \text{ou} \quad yy = 2a(\tfrac{1}{2}a - x),$$

d'où l'on voit que la courbe eſt une parabole, dont le parametre eſt $= 2a$, & que le point C ſe trouve dans ſon foyer. Savoir la parabole M A N a cette propriété, que menant par ſon foyer C une droite quelconque M C N, les tangentes M T & N T tirées aux points M & N faſſent en T un angle droit. Et poſant depuis l'axe A C l'Angle A C M $= \Phi$ & C M $= z$, le parametre de la parabole

Fig. 2.

étant

étant $= 2a$, il y aura $z = \frac{a}{1+\cos\Phi} = CM$, & $CN = \frac{a}{1-\cos\Phi}$; de plus ayant tiré à l'axe CA la perpendiculaire $MP = y$, & posant $CP = x$ de sorte que $AP = \frac{1}{2}a - x$, on aura $yy = 2a(\frac{1}{2}a - x) = 2a.AP$, comme il est clair de la nature de la parabole, & l'angle CMT est toujours le complément de la moitié de l'angle ACM.

2. *Courbe.* Soit maintenant $z = a(1-\cos\Phi)$, qui résulte de Fig.
$t = \frac{1-\cos\Phi}{\sin\Phi} = \frac{\sin\Phi}{1+\cos\Phi} = \text{tang}\,\frac{1}{2}\Phi$, d'où l'on voit que dans cette courbe l'angle CMT est partout la moitié de l'angle ACM. Puisque $\cos\Phi = \frac{x}{z}$, on aura $zz = az - ax$, ou $xx+yy+ax = a\sqrt{(xx+yy)}$ & partant cette équation du quatrième ordre $(xx+yy)^2 + 2aax(xx+yy) = aayy$, d'où l'on peut voir, que cette courbe est l'epicycloïde décrite, lorsque le cercle mobile est égal à l'immobile, dont le point de rebroussement tient lieu du point fixe C. Mais la nature de la courbe & sa construction se tirent plus aisément de l'équation $z = a(1-\cos\Phi)$. D'où l'on voit que posant l'angle $ACM = \Phi$, il y a $CM = a(1-\cos\Phi)$ & $CN = a(1+\cos\Phi)$, de sorte que toutes les lignes MCN tirées par le point C sont égales entr'elles & $= CB$.

II. Solution.

Qu'il demeure $\frac{\mu}{\nu} = 0$ & $\frac{m}{n} = 1$, mais qu'on prenne pour λ un nombre impair quelconque: de sorte qu'on ait,

$$\text{ou}\quad \frac{dz}{z} = +\frac{d\Phi\sin\lambda\Phi}{1+\cos\lambda\Phi},\quad \text{ou}\quad \frac{dz}{z} = +\frac{d\Phi\sin\lambda\Phi}{1-\cos\lambda\Phi},$$

& l'une & l'autre formule fournira une infinité de courbes algébriques, dont nous examinerons les principales propriétés.

1. *Cas.* Soit donc $\frac{d\varpi}{\varpi} = + \frac{d\Phi \sin \lambda\Phi}{1+\cos\lambda\Phi}$, & l'intégration donne $l\varpi = la - \frac{1}{\lambda} l(1+\cos\lambda\Phi)$, & partant

$$\varpi^{\lambda} = \frac{a^{\lambda}}{1+\cos\lambda\Phi}, \quad \text{ou bien} \quad \varpi = \frac{a}{\sqrt[\lambda]{(1+\cos\lambda\Phi)}}.$$

Prenons $\lambda = 3$, de sorte que nous ayons $\varpi = \frac{a}{\sqrt[3]{(1+\cos 3\Phi)}}$ & pour les différentes valeurs de l'angle Φ nous aurons :

si $\Phi = 0$;	$\varpi = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$	si $\Phi = 90°$;	$\varpi = a$
$\Phi = 30°$;	$\varpi = a$	$\Phi = 120°$;	$\varpi = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$
$\Phi = 60°$;	$\varpi = \infty$	$\Phi = 150°$;	$\varpi = a$
$\Phi = 90°$;	$\varpi = a$	$\Phi = 180°$;	$\varpi = \infty$

Fig. 4. D'où l'on voit que cette courbe a trois asymtotes Ca, Ce, Cf, qui se croisent à angles égaux au point C, & trois branches égales, $\alpha A \alpha$, $\epsilon E \epsilon$, & $\zeta F \zeta$.

Par là on comprend, que si l'on mettoit $\lambda = 5$, la courbe auroit cinq asymtotes, & autant de branches égales & semblables, ce qui s'étend à tous les autres nombres impairs posés pour λ. Au reste si $\lambda = 3$, la courbe sera du 6me ordre, si $\lambda = 5$, du 10me & en général elle sera de l'ordre 2λ. Le cas précedent de la parabole y est aussi compris en posant $\lambda = 1$; mais dans ce cas la courbe n'a pas des branches asymtotiques, comme dans les autres cas, où λ est un nombre impair plus grand que l'unité.

De

De ces courbes il faut auſſi remarquer, que puisque $\frac{zd\Phi}{dz} = t = \frac{1+\cos\lambda\Phi}{\sin\lambda\Phi} = \cot\frac{1}{2}\lambda\Phi$, il y aura $CMT = 90° - \frac{1}{2}\lambda\Phi$, ou $CMT = 90° - \frac{\lambda}{2}.ACM$.

2. *Cas.* Soit maintenant $\frac{-dz}{z} = +\frac{d\Phi\sin\lambda\Phi}{1-\cos\lambda\Phi}$: & on aura après l'intégration :

$$lz = la + \frac{1}{\lambda}l(1-\cos\lambda\Phi), \quad \text{ou} \quad z = a\sqrt[\lambda]{(1-\cos\lambda\Phi)}.$$

Poſons $\lambda = 3$, de ſorte que $z = a\sqrt[3]{(1-\cos 3\Phi)}$, & nous aurons pour les différentes valeurs de l'angle Φ :

ſi $\Phi = 0°$;	$z = 0$	ſi $\Phi = 90°$;	$z = a$
$\Phi = 30$;	$z = a$	$\Phi = 120$;	$z = 0$
$\Phi = 60$;	$z = a\sqrt[3]{2}$	$\Phi = 150$;	$z = a$
$\Phi = 90$;	$z = a$	$\Phi = 180$;	$z = a\sqrt[3]{2}$

Cette courbe ſera donc compoſée de trois feuïlles égales & ſemblables, comme elles ſont repréſentées dans la 5 me Figure, collées au point fixe C. Et ſi l'on poſe $z = 5$ ou $z = 7$, on aura des courbes formées de 5 ou 7 feuïlles auſſi ſemblables entr'elles. Et partant ce cas fournit auſſi une infinité de courbes algébriques, qui ſatisfont au problème. Puisque dans l'application de ces courbes on a

$$t = \frac{zd\Phi}{dz} = \frac{1-\cos\lambda\Phi}{\sin\lambda\Phi} = \text{tang}\,\frac{1}{2}\lambda\Phi,$$

on voit qu'il y aura toujours $CMT = \frac{\lambda}{2}ACM$, & dans le cas de $\lambda = 3$, l'angle $CMT = \frac{3}{2}ACM$. Pour ce cas $\lambda = 3$, ſi l'on introduit les coordonnées $x = z\cos\Phi$ & $y = z\sin\Phi$, on aura

$$z^6 = a^3z^3 - a^3x^3 + 3a^3xyy \qquad \&$$

& cette équation étant reduite à la rationalité, à cauſe de $zz = xx + yy$, montera au 12me degré. D'où l'on conclut aiſément, que mettant pour λ un nombre impair quelconque, la courbe ſera du $4\lambda^{me}$ ordre.

III. Solution.

Tant que nous poſons $\frac{\mu}{\nu} = 0$, nous ne pourrons pas trouver d'autres cas, qui conduiſent à des courbes algébriques, & il eſt évident par la forme des différentiels logarithmiques, que l'un & l'autre expoſant $\frac{m}{n}$ & $\frac{\mu}{\nu}$ ne ſauroient recevoir d'autre valeur que l'unité. D'où nous aurons cette équation à conſidérer

$$\frac{dz}{z} = \pm d\varphi \cdot \frac{\sin \lambda\varphi}{1 \pm \cos \lambda\varphi} \cdot \frac{P - Q}{P + Q},$$

où P doit être une fonction paire, Q impaire de $\sin \varphi$ & $\cos \varphi$ & λ un nombre impair. Soit donc d'abord $\lambda = 1$, $P = 1$, & $Q = m \cos \varphi$, de ſorte que nous ayons :

$$\frac{dz}{z} = \pm d\varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \cdot \frac{1 - m \cos \varphi}{1 + m \cos \varphi}.$$

Concevons que ce multiplicateur de $\pm d\varphi$, ſe réſolve en ces deux parties : $\frac{\alpha \sin \varphi}{1 + \cos \varphi} + \frac{\mathfrak{G} \sin \varphi}{1 + m \cos \varphi}$, & il faut qu'il ſoit

$$\sin \varphi - m \sin \varphi \cos \varphi = \alpha \sin \varphi + \mathfrak{G} \sin \varphi + (\mathfrak{G} + \alpha m) \sin \varphi \cos \varphi$$

& partant : $\alpha + \mathfrak{G} = 1$ & $\mathfrak{G} + \alpha m = -m$, donc :

$$\alpha(m-1) = -m-1 \quad \& \quad \alpha = \frac{m+1}{1-m} \quad \& \quad \mathfrak{G} = \frac{-2m}{1-m}.$$

De là nous obtiendrons :

$$\pm(1-m)\frac{dz}{z} = \frac{(m+1)\, d\varphi \sin \varphi}{1 + \cos \varphi} - \frac{2m\, d\varphi \sin \varphi}{1 + m \cos \varphi}.$$

&

& en prenant les intégrales :

$$\pm(1-m)\,l\frac{z}{a} = -l(1+\cos\phi)^{m+1} + l(1+m\cos\phi)^2,$$

I. $z^{1-m} = \dfrac{a^{1-m}(1+m\cos\phi)^2}{(1+\cos\phi)^{1+m}}$; II. $z^{1-m} = \dfrac{a^{1-m}(1+\cos\phi)^{1+m}}{(1+m\cos\phi)^2}$

& puisque l'on peut prendre pour m tout nombre poſſible, ces deux équations fourniſſent une infinité de ſolutions ſatisfaiſantes par des courbes algébriques. On voit d'abord que ſi l'on mettoit $m=-1$, on tomberoit dans la première ſolution, & que le cas $m=1$ ne meneroit à rien. Dévelopons donc quelques uns des plus ſimples cas :

Cas 1. Soit $m=2$, & on aura :

I. $\dfrac{z}{a} = \dfrac{(1+\cos\phi)^3}{(1+2\cos\phi)^2}$; II. $\dfrac{z}{a} = \dfrac{(1+2\cos\phi)^2}{(1+\cos\phi)^3}$,

d'où pour differentes valeurs de l'angle ϕ, on tirera :

I.	II.
ſi $\phi = 0°$; $z = \frac{8}{9}a$	ſi $\phi = 0$; $z = \frac{8}{8}a$
$\phi = 30°$; $z = \dfrac{7+4\sqrt{3}}{16}a$	$\phi = 30°$; $z = 16(7-4\sqrt{3})a$
$\phi = 60°$; $z = \frac{27}{32}a$	$\phi = 60°$; $z = \frac{32}{27}a$
$\phi = 90°$; $z = a$	$\phi = 90°$; $z = a$
$\phi = 120°$; $z = \infty a$	$\phi = 120°$; $z = 0a$
$\phi = 150°$; $z = \dfrac{7-4\sqrt{3}}{16}a$	$\phi = 150°$; $z = 16(7+4\sqrt{3})a$
$\phi = 180°$; $z = 0a$	$\phi = 180°$; $z = \infty a$

Fig. 6. La courbe, qui répond à la premiere formule, aura donc la forme repreſentée dans la 6me figure, & eſt compoſée de deux branches EAE & γCγ, qui concourent avec les aſymptotes *Cc* & *Cc* inclinées à l'axe CB de 60 degrés : & la branche γCγ a un point de rebrouſſement dans le point C.

Fig. 7. Or la courbe qui répond à l'autre cas, eſt repréſentée dans la 7me Figure. Elle a d'abord une feuille ADCDA fermée au point fixe C, où concourent deux points de rebrouſſement, dont les tangentes ſont inclinées à l'axe CB d'un angle de 60° de part & d'autres : & de là partent deux branches paraboliques CE & CE, qui s'éloignent à l'infini.

En poſant $z\cos\phi = x$, on aura les équations ſuivantes :

I. $z^4 + 4xz^3 + 4xxzz = az^3 + 3axzz + 3axxz + ax^3$.

II. $z^3 + 3xzz + 3xxz = azz + 4axz + 4axx$,

entre les coordonnées x & y la première montera au huitième, & l'autre au ſixième degré.

Cas. 2. Soit $m = 3$, & on aura :

I. $z^2 = \frac{a^2(1+\cos\phi)^4}{(1+3\cos\phi)^2}$; II. $z^2 = \frac{a^2(1+3\cos\phi)^2}{(1+\cos\phi)^4}$,

qui en extrayant la racine quarrée ſe réduiſent à :

I. $z = \frac{a(1+\cos\phi)^2}{1+3\cos\phi}$; II. $z = \frac{a(1+3\cos\phi)}{(1+\cos\phi)^2}$.

Fig. 8. La premiere de ces courbes eſt repréſentée dans la 8me figure, qui eſt compoſée de deux branches EAE & γCγ, qui concourent avec les aſymptotes *ce*, *ce* inclinées à l'axe AB d'un angle 70°, 32', dont le coſinus eſt $= \frac{1}{3}$: & la derniere branche γCγ a un point de rebrouſſement au point C.

L'au-

L'autre courbe eſt repréſentée dans la 9me Figure & eſt formée d'un trait continu ECDADCE, dont les branches CE, CE étendues à l'infini ſont paraboliques. Fig. 9.

Cas. 3. Soit $m = \frac{1}{2}$, & nos deux équations ſeront

I. $\sqrt{\frac{z}{a}} = \frac{(1+\frac{1}{2}\cos\phi)^2}{(1+\cos\phi)^{\frac{3}{2}}}$; II. $\sqrt{\frac{z}{a}} = \frac{(1+\cos\phi)^{\frac{3}{2}}}{(1+\frac{1}{2}\cos\phi)^2}$,

ou prenant les quarrés

I. $z = \frac{a(1+\frac{1}{2}\cos\phi)^4}{(1+\cos\phi)^3}$; II. $z = \frac{a(1+\cos\phi)^3}{(1+\frac{1}{2}\cos\phi)^4}$,

auxquelles répond la tangente de l'angle CMT

I. $t = \frac{(1+\cos\phi)(1+\frac{1}{2}\cos\phi)}{\sin\phi(1-\frac{1}{2}\cos\phi)}$; II. $t = -\frac{(1+\cos\phi)(1+\frac{1}{2}\cos\phi)}{\sin\phi(1-\frac{1}{2}\cos\phi)}$.

Ces deux courbes ſont plus regulières que les précedentes, la premiere (Fig. 10.) étant ſemblable à une parabole, & l'autre (Fig. 11.) à une épicycloïde.

IV. Solution.

La ſolution precédente ſera portée à une plus grande généralité en mettant $\sin\lambda\phi$ & $\cos\lambda\phi$, au lieu de $\sin\phi$ & $\cos\phi$, où λ marque un nombre impair quelconque. Poſons donc :

$$\pm\frac{dz}{z} = d\phi\cdot\frac{\sin\lambda\phi}{1+\cos\lambda\phi}\cdot\frac{1-m\cos\lambda\phi}{1+m\cos\lambda\phi},$$

& cette équation ſe reduira à cette forme :

$$\pm(1-m)\frac{dz}{z} = \frac{(m+1)\,d\phi\sin\lambda\phi}{1+\cos\lambda\phi} - \frac{2m\,d\phi\sin\lambda\phi}{1+m\cos\lambda\phi},$$

dont l'intégrale ſe trouve :

$$\pm(1-m)\,l\frac{z}{a} = -\frac{(m+1)}{\lambda}\,l(1+\cos\lambda\phi) + \frac{2}{\lambda}\,l(1+m\cos\lambda\phi),$$

d'où l'on tire les deux équations ſuivantes :

$$\text{I. } z = a \cdot \frac{(1+m\cos\lambda\Phi)^{\frac{2}{\lambda(1-m)}}}{(1+\cos\lambda\Phi)^{\frac{m+1}{\lambda(1-m)}}} ; \quad \text{II. } z = a \cdot \frac{(1+\cos\lambda\Phi)^{\frac{m+1}{\lambda(1-m)}}}{(1+m\cos\lambda\Phi)^{\frac{2}{\lambda(1-m)}}}$$

Et la tangente de l'angle C M T ſera pour ces deux cas :

$$\text{I. } t = +\frac{(1+\cos\lambda\Phi)(1+m\cos\lambda\Phi)}{\sin\lambda\Phi\,.\,(1-m\cos\lambda\Phi)} ; \quad \text{II. } t = -\frac{(1+\cos\lambda\Phi)(1+m\cos\lambda\Phi)}{\sin\lambda\Phi\,.\,(1-m\cos\lambda\Phi)}$$

d'où l'on peut tirer encore une plus grande infinité de courbes algébriques, qui ſatisfont au problème ; puiſqu'il y a ici deux nombres λ & m, qu'on peut prendre à volonté, celui-cy m ſans aucune reſtriction, mais celui-là λ ne ſauroit marquer que des nombres impairs entiers. Il ne ſera pas auſſi difficile de tracer à peu près la figure de ces courbes.

V. Solution.

Pour rendre ces ſolutions encore plus générales, je remarque qu'au lieu d'un facteur $\frac{1-m\cos\Phi}{1+m\cos\Phi}$, on y peut ajouter autant d'autres qu'on veut de la même forme, ſans que l'intégration par les logarithmes en ſoit troublée. Or pour en rendre l'opération plus évidente, je mettrai pour m des fractions, & prenant m, n, p, q, pour des nombres quelconques, ſoit

$$\pm\frac{dz}{z} = d\Phi\sin\Phi\cdot\frac{1}{1-\cos\Phi}\cdot\frac{m+\cos\Phi}{m-\cos\Phi}\cdot\frac{n+\cos\Phi}{n-\cos\Phi}\cdot\frac{p+\cos\Phi}{p-\cos\Phi}$$

& qu'on dévelope cette fraction compoſée en des fractions ſimples, ſelon la méthode que j'ai enſeignée en regardant $\cos\Phi$ comme une ſimple variable.

Qu'on

Qu'on poſe pour abréger ſelon cette méthode :

$$\frac{(m+1)(n+1)(p+1)}{(m-1)(n-1)(p-1)} = \alpha$$

$$\frac{2m}{(1-m)}\,\frac{(n+m)(p+m)}{(n-m)(p-m)} = \varepsilon$$

$$\frac{2n}{(1-n)}\,\frac{(m+n)(p+n)}{(m-n)(p-n)} = \gamma$$

$$\frac{2p}{(1-p)}\,\frac{(m+p)(n+p)}{(m-p)(n-p)} = \delta$$

& notre équation ſe réſoudra dans cette forme :

$$\pm\frac{dz}{z} = \frac{\alpha\, d\Phi \sin\Phi}{1-\cos\Phi} + \frac{\varepsilon\, d\Phi \sin\Phi}{m-\cos\Phi} + \frac{\gamma\, d\Phi \sin\Phi}{n-\cos\Phi} + \frac{\delta\, d\Phi \sin\Phi}{p-\cos\Phi},$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{z}{a} \text{ ou } \frac{a}{z} = (1-\cos\Phi)^{\alpha}(m-\cos\Phi)^{\varepsilon}(n-\cos\Phi)^{\gamma}(p-\cos\Phi)^{\delta}.$$

VI. Solution.

On peut rendre cette ſolution encore plus générale en introduiſant l'angle multiple $\lambda\Phi$ au lieu du ſimple Φ, où λ marque un nombre impair. Car alors en prenant pour m, n, p, q, &c. des nombres quelconques, les conditions du problème ſeront auſſi remplies par cette équation :

$$\pm\frac{dz}{z} d\Phi \sin\lambda\Phi \cdot \frac{1}{1-\cos\lambda\Phi} \cdot \frac{m+\cos\lambda\Phi}{m-\cos\lambda\Phi} \cdot \frac{n+\cos\lambda\Phi}{n-\cos\lambda\Phi} \cdot \frac{p+\cos\lambda\Phi}{p-\cos\lambda\Phi} \cdot \frac{q+\cos\lambda\Phi}{q-\cos\lambda\Phi}.$$

Or ce produit de fractions eſt auſſi réſoluble en des fractions ſimples, dont chacune eſt un différentiel logarithmique : car en poſant v pour $\cos\lambda\Phi$, on fait, que cette fraction :

$$\frac{1}{(1-v)}\,\frac{(m+v)(n+v)(p+v)(q+v)}{(m-v)(n-v)(p-v)(q-v)},$$

puisque la variable v a moins de dimenſions dans le numérateur que dans le dénominateur, eſt réſoluble en ces fractions ſimples

$$\frac{\alpha}{1-v}+\frac{\mathfrak{G}}{m-v}+\frac{\gamma}{n-v}+\frac{\delta}{p-v}+\frac{\epsilon}{q-v},$$

dont les numérateurs ont les valeurs ſuivantes :

$$\alpha = \frac{(m+1)(n+1)(p+1)(q+1)}{(m-1)(n-1)(p-1)(q-1)}$$

$$\mathfrak{G} = \frac{2m}{(1-m)}\,\frac{(n+m)(p+m)(q+m)}{(n-m)(p-m)(q-m)}$$

$$\gamma = \frac{2n}{(1-n)}\,\frac{(m+n)(p+n)(q+n)}{(m-n)(p-n)(q-n)}$$

$$\delta = \frac{2p}{(1-p)}\,\frac{(m+p)(n+p)(q+p)}{(m-p)(n-p)(q-p)}$$

$$\epsilon = \frac{2q}{(1-q)}\,\frac{(m+q)(n+q)(p+q)}{(m-q)(n-q)(p-q)}$$

Donc, ſi nous remettons $\cos\lambda\Phi$ pour v, & que nous multiplions toutes ces fractions par $d\Phi\sin\lambda\Phi$, nous aurons :

$$\pm\frac{dz}{z}=\frac{\alpha d\Phi\sin\lambda\Phi}{1-\cos\lambda\Phi}+\frac{\mathfrak{G}d\Phi\sin\lambda\Phi}{m-\cos\lambda\Phi}+\frac{\gamma d\Phi\sin\lambda\Phi}{n-\cos\lambda\Phi}+\frac{\delta d\Phi\sin\lambda\Phi}{p-\cos\lambda\Phi}+\frac{\epsilon d\Phi\sin\lambda\Phi}{q-\cos\lambda\Phi}$$

dont l'intégrale eſt :

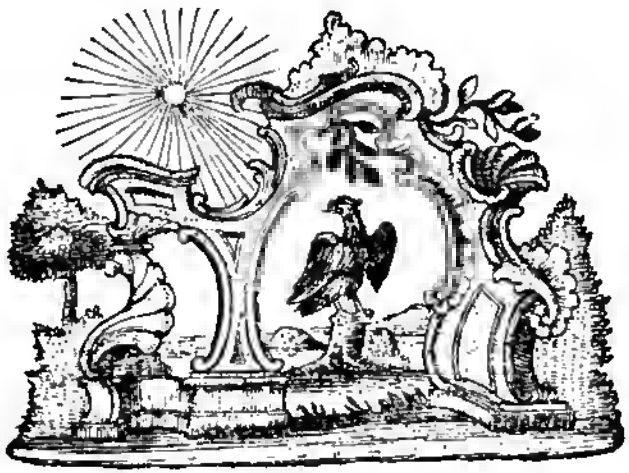
$$\frac{z}{s}\text{ ou }\frac{s}{z}=(1-\cos\lambda\Phi)^{\frac{\alpha}{\lambda}}(m-\cos\lambda\Phi)^{\frac{\mathfrak{G}}{\lambda}}(n-\cos\lambda\Phi)^{\frac{\gamma}{\lambda}}(p-\cos\lambda\Phi)^{\frac{\delta}{\lambda}}(q-\cos\lambda\Phi)^{\frac{\epsilon}{\lambda}}$$

de ſorte que nous ayons une double équation algébrique, dont l'une & l'autre fournit une infinité infinie de courbes algebriques : puiſque non ſeulement les quantités m, n, p, q ſont arbitraires, mais que leur nombre peut être augmenté à volonté.

RE-

REMARQUE.

La ſolution de ce problème, que je viens de trouver, eſt ſi générale qu'il n'y a point de doute, que toutes les ſolutions poſſibles n'y ſoient compriſes: ce qui eſt d'autant plus remarquable, que la nature du problème ſembloit d'abord promettre un petit nombre de courbes algébriques, à cauſe de la ſingularité, qu'avant que d'y arriver il faloit paſſer par une équation logarithmique. Or nous venons de voir que cette même circonſtance nous a conduit à cette incompréhenſible infinité de ſolutions algébriques, qui ſurpaſſe bien loin la multitude des ſolutions, qu'on trouve pour d'autres problèmes indéterminés de même genre, où il s'agit des ſolutions algébriques, & auxquels on peut appliquer la méthode, que j'ai donnée autrefois pour cette fin. Le problème mérite donc à cet égard toute l'attention poſſible, & il n'y a point de doute, que ſa conſidération ne conduiſe à quantité d'autres belles recherches.



RE-

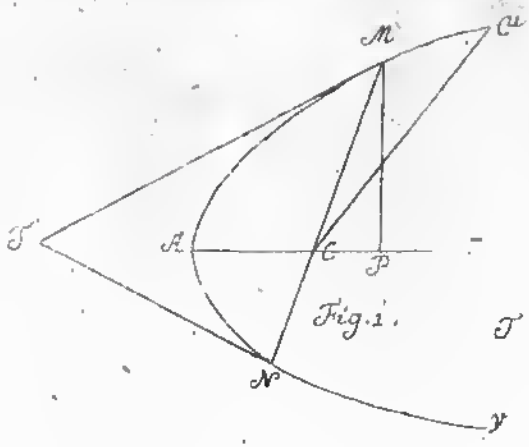


Fig. 1.

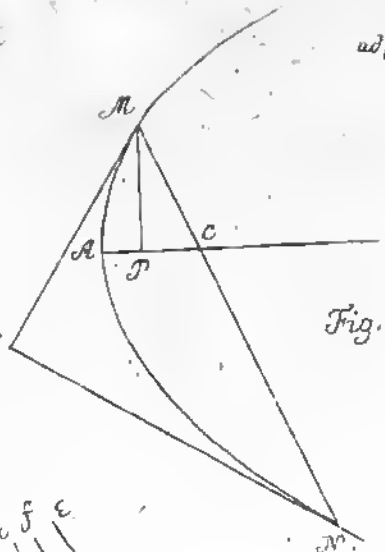


Fig. 2.

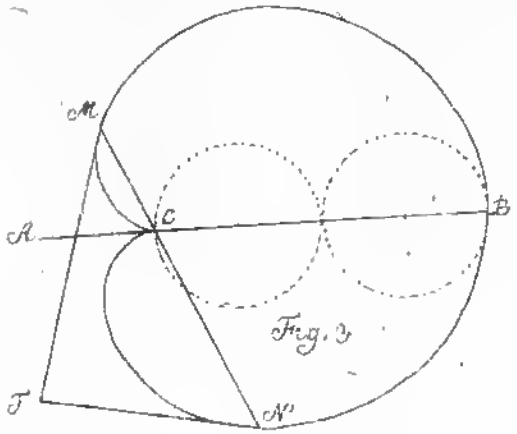


Fig. 3.

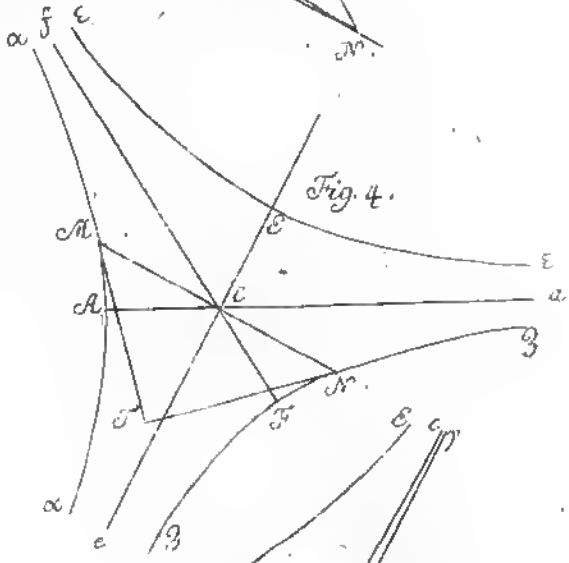


Fig. 4.

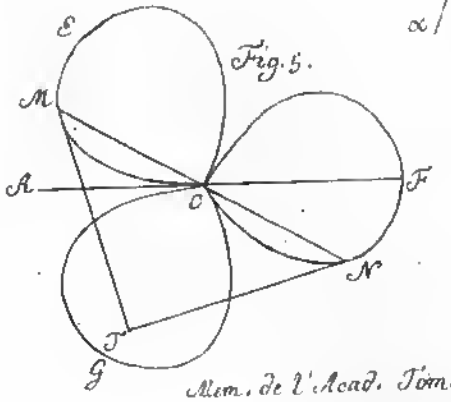


Fig. 5.

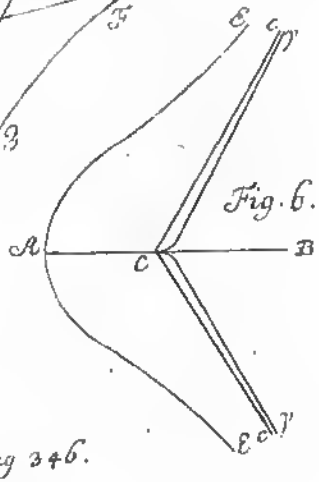


Fig. 6.

Mem. de l'Acad. Tom. X. pag 346.

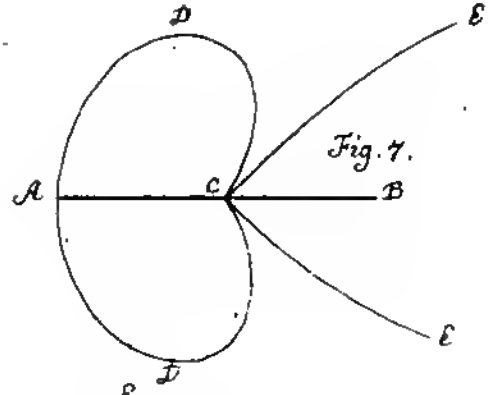


Fig. 7.

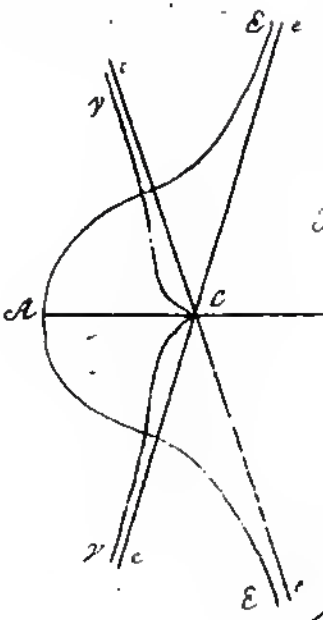


Fig. 8.

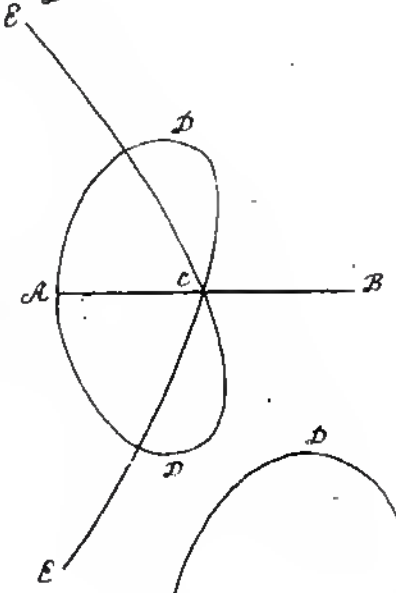


Fig. 9.

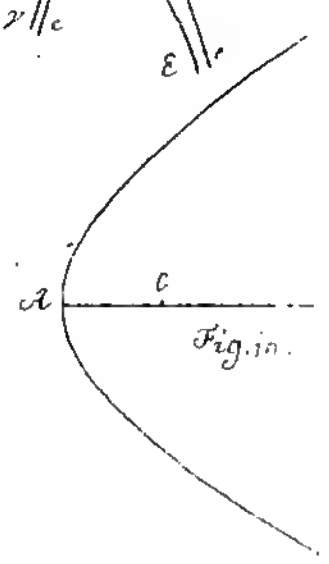


Fig. 10.

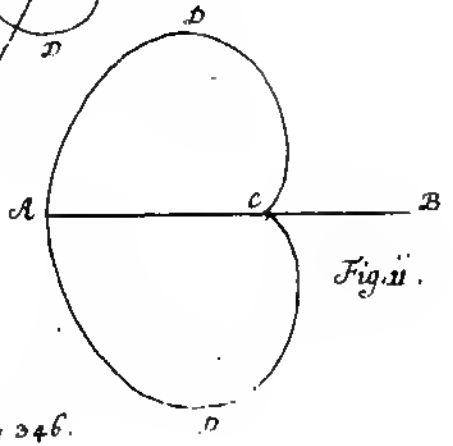


Fig. 11.